# Ultrafilter

Kowalsky, Hans-Joachim

Veröffentlicht in:
Jahrbuch 1995 der Braunschweigischen
Wissenschaftlichen Gesellschaft, S.19-24

Verlag Erich Goltze KG, Göttingen

HANS-JOACHIM KOWALSKY, Braunschweig

# Ultrafilter

Braunschweig, 10.3.1995*

## Einleitung

Vorbereitend soll auf die mengentheoretische Begriffsbildung des Filters eingegangen werden. Dazu sei X eine fest gewählte unendliche Menge, und $\mathfrak{a}$ sei ein nicht leeres System aus Teilmengen von X.

**Definition** $\mathfrak{a}$ *heißt ein Filter (von X), wenn*

(1) *aus* $A_1, A_2 \in \mathfrak{a}$ *auch* $A_1 \cap A_2 \in \mathfrak{a}$ *und*

(2) *aus* $A \in \mathfrak{a}$ *und* $A \subseteq M$ *auch* $M \in \mathfrak{a}$ *folgt.*

So ist zum Beispiel im $\mathbb{R}^2$ das System aller Umgebungen eines Punktes x, also aller Teilmengen der Ebene, die noch eine Kreisscheibe um x mit hinreichend kleinem Radius enthalten, ein Filter, der Umgebungsfilter von x. Nimmt man aus allen diesen Umgebungen jeweils den Punkt x heraus, so bilden die punktierten Umgebungen ebenfalls einen Filter. Ein weiteres Beispiel ist das System aller Teilmengen A von X, deren Komplementärmenge X\A endlich ist.

Die wesentliche Filtereigenschaft ist die Durchschnittsbedingung (1). Die zweite Forderung besagt lediglich, daß ein Filter hinsichtlich der Obermengenbildung aufgefüllt ist. Dem trägt die folgende Begriffsbildung Rechnung.

**Definition** *Ein nicht leeres System* $\mathfrak{B}$ *aus Teilmengen von* X *heißt Filterbasis, wenn zu* $B_1, B_2 \in \mathfrak{B}$ *stets ein* $B \in \mathfrak{B}$ *existiert mit* $B \subseteq B_1 \cap B_2$.

**Satz** *Ist* $\mathfrak{B}$ *eine Filterbasis, so ist* $\dot{\mathfrak{B}} = \{A \mid B \subseteq A \subseteq X$ für ein $B \in \mathfrak{B}\}$ *ein Filter, der von* $\mathfrak{B}$ *erzeugte Filter.*

Ein aus nur einer Menge bestehendes System $\mathfrak{B} = \{B\}$ ist eine besonders einfache Filterbasis. Der von ihr erzeugte Filter wird einfacher mit $\ddot{B}$ bezeichnet und der von der Menge B erzeugte Hauptfilter genannt. Er besteht aus allen Obermengen von B. Wichtige Spezialfälle sind der Hauptfilter $\dot{X}$, der nur aus der Menge X besteht, und der Filter $\mathfrak{o} = \dot{\emptyset}$, der das System aller Teilmengen von X ist und Nullfilter genannt werden soll.

In der Menge $\mathbb{F}$ aller Filter von X wird durch die mengentheoretische Inklusion eine Ordnungsrelation definiert. Hier soll allerdings die zu ihr inverse Relation benutzt werden.

---

* Vortrag vor der Plenarversammlung der Braunschweigischen Wissenschaftlichen Gesellschaft

**Definition** *Für Filter* $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in \mathbb{F}$ *sei* $\mathfrak{a} \leq \mathfrak{b}$ *(*$\mathfrak{a}$ *feiner oder gleich* $\mathfrak{b}$*) durch* $\mathfrak{a} \supseteq \mathfrak{b}$ *erklärt.*

Hiernach ist $\mathfrak{a} \leq \mathfrak{b}$ gleichwertig damit, daß aus $B \in \mathfrak{b}$ stets auch $B \in \mathfrak{a}$ folgt. Für jeden Filter $\mathfrak{a} \in \mathbb{F}$ gilt $\mathfrak{o} \leq \mathfrak{a} \leq \hat{X}$, weswegen $\hat{X}$ hinsichtlich dieser Ordnung der gröbste und der Nullfilter $\mathfrak{o}$ der feinste Filter ist.

**Satz** $\mathbb{F}$ *ist bezüglich* $\leq$ *ein vollständiger Verband: Es existieren in* $\mathbb{F}$ *beliebige Vereinigungsfilter* $\bigvee \mathfrak{a}_\iota$ *und Durchschnittsfilter* $\bigwedge \mathfrak{a}_\iota$, *wobei*

$$\{\bigcup A_\iota \mid A_\iota \in \mathfrak{a}_\iota \text{ für alle } \iota\} \textit{ eine Filterbasis von } \bigvee \mathfrak{a}_\iota \textit{ und}$$
$$\{A_{\iota_1} \cap \ldots \cap A_{\iota_n} \mid A_{\iota_1} \in \mathfrak{a}_{\iota_1}, \ldots, A_{\iota_n} \in \mathfrak{a}_{\iota_n}\} \textit{ eine Filterbasis von } \bigwedge \mathfrak{a}_\iota$$

*ist.*

Bei dieser Wahl der Ordnungsrelation entsprechen also der Vereinigungs- und Durchschnittsbildung bei den Filtern die analogen Operationen bei den Filtermengen, wobei allerdings im Fall des Durchschnittsfilters nur der Durchschnitt von jeweils endlich vielen Filtermengen zu bilden ist.

## 1. Ultrafilter

Im Filterverband $\mathbb{F}$ besitzt der Nullfilter unmittelbare obere Nachbarn, die als Ultrafilter bezeichnet werden.

**Definition** *Ein Filter* $\mathfrak{u}$ *heißt Ultrafilter, wenn* $\mathfrak{u} > \mathfrak{o}$ *gilt und wenn aus* $\mathfrak{o} \leq \mathfrak{a} < \mathfrak{u}$ *stets* $\mathfrak{a} = \mathfrak{o}$ *folgt.*

Der mit einem einzelnen Element x gebildete Hauptfilter $\hat{x} = \widehat{\{x\}}$ ist ein Ultrafilter, den man auch als den an x gebundenen Ultrafilter bezeichnet. Ultrafilter, die nicht in diesem Sinn gebunden sind, werden freie Ultrafilter genannt. Bezeichnet $\mathbb{U}$ die Menge aller und $\mathbb{U}_f$ die Menge der freien Ultrafilter, so gilt $|\mathbb{U}_f| = |\mathbb{U}| = |\mathbb{F}| = 2^{2^X}$. Man kann auch Konstruktionsverfahren für freie Ultrafilter angeben. Aber eine explizite Beschreibung freier Ultrafilter ist nicht möglich; ihre Struktur überfordert die Vorstellungskraft.

**Satz** (1) *Ein Filter* $\mathfrak{u}$ *ist genau dann ein Ultrafilter, wenn für alle Teilmengen* M *von* X *entweder* $M \in \mathfrak{u}$ *oder aber* $X \setminus M \in \mathfrak{u}$ *gilt.*
(2) *Für jeden Filter* $\mathfrak{a} \neq \mathfrak{o}$ *gilt* $\mathfrak{a} = \bigvee\{\mathfrak{u} \mid \mathfrak{u} \in \mathbb{U}, \mathfrak{u} \leq \mathfrak{a}\}$.

Aus dem zweiten Teil des Satzes folgt insbesondere, daß jeder vom Nullfilter verschiedene Filter zu einem Ultrafilter verfeinert werden kann.

Ultrafilter sind ein wichtiges Hilfsmittel zum Beispiel bei Vervollständigungsprozessen, wie etwa Kompaktifizierungen, und in der Modelltheorie zur Konstruktion ungewöhnlicher Modelle von Axiomensystemen.

Als Beispiel diene eine Folge $(K_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ von beliebigen Körpern. Ihre Produktmenge $P = \prod_{\nu \in \mathbb{N}} K_\nu$ besteht aus allen Folgen $x = (x_\nu)$ mit $x_\nu \in K_\nu$ für alle Indizes $\nu$. Hinsichtlich der komponentenweise definierten Operationen $x \overset{+}{\cdot} y = (x_\nu \overset{+}{\cdot} y_\nu)$ ist dann P ein Ring mit $(0) = (0, 0, \ldots)$ als Nullelement und mit $(1) = (1, 1, \ldots)$ als Einselement. P ist aber kein Körper, weil zum Beispiel $(1, 0, 1, 0, \ldots)$ zwar vom Nullelement verschieden, aber nicht invertierbar ist.

Es sei nun weiter $\mathfrak{u}$ ein freier Ultrafilter der Indexmenge $\mathbb{N}$. Für beliebige Folgen $x = (x_\nu)$ und $y = (y_\nu)$ aus P sei dann die Relation $x \sim y$ dadurch erklärt, daß es eine Menge $U \in \mathfrak{u}$ gibt, so daß $x_\nu = y_\nu$ für alle $\nu \in U$ erfüllt ist. Unmittelbar ergibt sich, daß $\sim$ eine mit den Ringoperationen vertauschbare Äquivalenzrelation ist, so daß die Menge $\hat{P}$ der Äquivalenzklassen $\hat{x}$ von Folgen $x \in P$ wieder ein Ring ist. Dieser Ring $\hat{P}$ ist aber sogar ein Körper: Es sei nämlich $(x_\nu)$ eine von $\widehat{(0)}$ verschiedene Äquivalenzklasse, und M sei die Menge aller Indizes $\nu$ mit $x_\nu = 0$. Aus $M \in \mathfrak{u}$ würde $(x_\nu) = \widehat{(0)}$ im Widerspruch zur Voraussetzung folgen. Da $\mathfrak{u}$ ein Ultrafilter ist, muß also $\mathbb{N} \setminus M = \{\nu \mid x_\nu \neq 0\} \in \mathfrak{u}$ erfüllt sein. Setzt man nun $y = \frac{1}{x_\nu}$ für $\nu \in \mathbb{N} \setminus M$ und $y_\nu = 1$ für $\nu \in M$, so ist $(y_\nu)$ gerade die zu $(x_\nu)$ inverse Klasse.

Wählt man bei dieser Konstruktion $K_\nu = \mathbb{Z}_{p_\nu}$, wobei $p_\nu$ die $\nu$-te Primzahl ist, so erhält man als resultierenden Körper $\hat{P}$ einen Körper der Charakteristik Null. Bei fester Wahl der Körper $K_\nu$ hängt die Struktur von $\hat{P}$ aber noch entscheidend von der Wahl des Ultrafilters $\mathfrak{u}$ von $\mathbb{N}$ ab.

## 2. Präordnung, primitive Filter

Es sei $\mathfrak{a}$ ein Filter von X, und $\varphi$: $X \to X$ sei eine Abbildung. Dann ist $\mathfrak{B} = \{\varphi A \mid A \in \mathfrak{a}\}$ eine Filterbasis.

**Definition** $\hat{\varphi}\mathfrak{a} := \hat{\mathfrak{B}}$ *wird der Bildfilter von* $\mathfrak{a}$ *bei der Abbildung* $\varphi$ *genannt.*

**Satz** *Ist* $\mathfrak{u}$ *ein Ultrafilter, so ist auch* $\hat{\varphi}\mathfrak{u}$ *ein Ultrafilter.*

**Definition** *Für Ultrafilter* $\mathfrak{u}_1, \mathfrak{u}_2$ *sei* $\mathfrak{u}_1 \trianglelefteq \mathfrak{u}_2$ *dadurch definiert, daß es eine Abbildung* $\varphi$: $X \to X$ *mit* $\hat{\varphi}\mathfrak{u}_2 = \mathfrak{u}_1$ *gibt.*

Die so definierte Relation $\trianglelefteq$ ist eine Präordnung auf $\mathbb{U}$. Die zu ihr gehörende Äquivalenzrelation $\approx$ ist dadurch erklärt, daß $\mathfrak{u}_1 \approx \mathfrak{u}_2$ gleichwertig mit $\mathfrak{u}_1 \trianglelefteq \mathfrak{u}_2$ und $\mathfrak{u}_2 \trianglelefteq \mathfrak{u}_1$ ist.

Die durch $\trianglelefteq$ bestimmt Ordnungsbeziehung auf $\mathbb{U}$ führt zu verhältnismäßig übersichtlichen Bedingungen, wenn die Grundmenge X lediglich abzählbar ist, wenn also eine Bijektion $\psi$: $X \to \mathbb{N}$ existiert. Dies sei von jetzt an stets vorausgesetzt.

**Definition** *Eine Abbildung* $\varphi$: $X \to X$ *heißt auf einem gegebenen Filter* $\mathfrak{a}$ *injektiv, wenn es eine Filtermenge* $A \in \mathfrak{a}$ *gibt, so daß die Einschränkung von* $\varphi$ *auf* A *eine injektive Abbildung ist.*

*Ein Filter* $\mathfrak{p}$ *von* X *soll primitiv genannt werden, wenn er ein freier Ultrafilter ist und wenn für jede Abbildung* $\varphi: X \to X$ *gilt:* $\hat{\varphi}\mathfrak{p}$ *ist ein gebundener Ultrafilter oder* $\varphi$ *ist auf* $\mathfrak{p}$ *injektiv.*

Primitive Filter gibt es nur auf abzählbaren Mengen. Im Sinn der Präordnung $\trianglelefteq$ sind sie obere Nachbarn der gebundenen Ultrafilter.

**Satz** $\mathfrak{p}$ *ist genau dann primitiv, wenn für jede Zerlegung* $\{Z_\nu \mid \nu \in \mathbb{N}\}$ *von* X *gilt: Es gibt ein* $\nu$ *mit* $Z_\nu \in \mathfrak{p}$, *oder es gibt ein* $P \in \mathfrak{p}$ *mit* $|P \cap Z_\nu| \leq 1$ *für alle* $\nu$.

*Ist* $\{\mathfrak{p}_\nu \mid \nu \in \mathbb{N}\}$ *eine Menge paarweise verschiedener primitiver Filter, dann gibt es eine Zerlegung* $\{Z_\nu \mid \nu \in \mathbb{N}\}$ *von* X *mit* $Z_\nu \in \mathfrak{p}_\nu$ *für alle* $\nu$.

Auf einer abzählbaren Grundmenge gibt es kontinuierlich viele primitive Filter.

Mit Hilfe primitiver Filter können induktiv kompliziertere Ultrafilter konstruiert werden.

**Satz** *Es sei* $\{\mathfrak{p}_x \mid x \in X\}$ *ein System paarweise verschiedener primitiver Filter, und* $\mathfrak{u}$ *sei ein Ultrafilter von* X. *Dann ist auch*

$$\mathfrak{a} = \bigwedge_{U \in \mathfrak{u}} \bigvee_{x \in U} \mathfrak{p}_x$$

*ein Ultrafilter von* X *und bezüglich* $\trianglelefteq$ *ein oberer Nachbar von* $\mathfrak{u}$.

Beginnend mit einem primitiven Filter $\mathfrak{u}_0$ kann man so aufsteigende Ketten $\mathfrak{u}_0 \trianglelefteq \mathfrak{u}_1 \trianglelefteq \mathfrak{u}_2 \trianglelefteq \ldots$ benachbarter Ultrafilter konstruieren mit Abbildungen $\varphi_{\mu,\nu}$ $(\mu < \nu)$, für die $\hat{\varphi}_{\mu,\nu}\,\mathfrak{u}_\nu = \mathfrak{u}_\mu$ und $\varphi_{\mu,\rho} = \varphi_{\mu,\nu} \circ \varphi_{\nu,\rho}$ gilt.

Das Konstruktionsverfahren läßt sich fortsetzen.

**Satz** *Es sei* $(\mathfrak{u}_\nu, \varphi_{\mu,\nu})$ *eine Folge von Ultrafiltern und Abbildungen mit* $\hat{\varphi}_{\mu,\nu}\,\mathfrak{u}_\nu = \mathfrak{u}_\mu$ $(\mu < \nu)$ und $\varphi_{\mu,\rho} = \varphi_{\mu,\nu} \circ \varphi_{\nu,\rho}$, *und* $\mathfrak{v}^*$ *sei ein freier Ultrafilter von* $\mathbb{N}$. *Dann ist*

$$\mathfrak{w} = \bigwedge_{V^* \in \mathfrak{v}^*} \bigvee_{\nu \in V^*} \mathfrak{u}_\nu$$

*ein Ultrafilter, zu dem Abbildungen* $\psi_\nu$ *mit* $\hat{\psi}_\nu\,\mathfrak{w} = \mathfrak{u}_\nu$ *und mit* $\psi_\mu = \varphi_{\mu,\nu} \circ \psi_\nu$ *existieren.*

Der Ultrafilter $\mathfrak{w}$ ist im Sinne der Präordnung $\trianglelefteq$ zwar eine obere Schranke der Folge $(\mathfrak{u}_\nu)$, nicht aber ein Supremum. Ein solches existiert auch nicht. Es gibt unendliche absteigende Folgen oberer Schranken, und bei jedem Limesschritt wiederholt sich die bisher gewonnene Schichtung der Ultrafilter jeweils als beiderseitig unendliche Folge von ordnungsisomorphen Exemplaren.

Alle Ultrafilter, die sich mit Hilfe dieses Konstruktionsverfahrens in abzählbar vielen Schritten erreichen lassen, sollen abzählbar-primitive Ultrafilter genannt werden. Eine Fortsetzung der Konstruktion über den Rahmen dieser Ultrafilter hinaus ist zwar möglich, erfordert aber eine Verallgemeinerung der bisherigen Präordnung: Es sei $\eta$ die erste überabzählbare Anfangszahl, und $(\mathfrak{u}_\iota)_{\iota < \eta}$ sei eine Ultrafilterkette mit Abbildungen

$\varphi_{\iota,\kappa}$ $(\iota < \kappa < \eta)$, für die entsprechend $\hat{\varphi}_{\iota,\kappa}\mathfrak{u}_\kappa = \mathfrak{u}_\iota$ und $\varphi_{\iota,\lambda} = \varphi_{\iota,\kappa} \circ \varphi_{\kappa,\lambda}$ $(\iota < \kappa < \lambda < \eta)$ gilt. Ferner sei $\mathfrak{v}^*$ jetzt ein Ultrafilter der überabzählbaren Indexmenge $\eta$. Dann ist zwar

$$\mathfrak{w} = \bigwedge_{V^* \in \mathfrak{v}^*} \bigvee_{\iota \in V^*} \mathfrak{u}_\iota$$

wieder ein Ultrafilter. Es gibt jetzt aber keine Abbildungen $\psi_\iota$ mit $\hat{\psi}_\iota \mathfrak{w} = \mathfrak{u}_\iota$ und $\psi_\iota = \varphi_{\iota,\kappa} \circ \psi_\kappa$. Die bisherige Präordnung $\trianglelefteq$ reicht daher beim Verlassen des Bereichs der abzählbar-primitiven Ultrafilter nicht mehr aus. Es bedarf somit einer Verallgemeinerung. Auf eine entsprechende Möglichkeit soll jetzt noch abschließend eingegangen werden.

## 3. Filterabbildungen

Die Grundmenge X braucht jetzt zunächst nicht abzählbar zu sein. Als Filterabbildungen sollen beliebige Abbildungen $\psi: \mathbb{F} \to \mathbb{F}$ bezeichnet werden. Jede Punktabbildung $\varphi: X \to X$ induziert eine Filterabbildung $\hat{\varphi}: \mathbb{F} \to \mathbb{F}$. In diesem Sinn kann man Filterabbildungen als Verallgemeinerungen von Punktabbildungen auffassen. Um spezielle Filterabbildungen kennzeichnen zu können, zunächst eine vorbereitende Begriffsbildung.

**Definition** *Es sei* M* *eine Teilmenge von* $\mathbb{F}$.

M* *heißt filtrierend, wenn zu je zwei Filtern* $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in$ M* *ein* $\mathfrak{c} \in$ M* *existiert mit* $\mathfrak{c} \leq \mathfrak{a} \wedge \mathfrak{b}$.

M* *heißt saturiert, wenn zu jedem Ultrafilter* $\mathfrak{u}$ *mit* $\mathfrak{u} \leq \bigvee_{\mathfrak{a} \in M^*} \mathfrak{a}$ *ein Filter* $\mathfrak{a}_0 \in$ M* *existiert mit* $\mathfrak{u} \leq \mathfrak{a}_0$.

Es soll nun eine spezielle Klasse von Filterabbildungen ausgezeichnet werden, die enger mit Ultrafiltern verknüpft sind und die daher kurz als U-Abbildungen bezeichnet werden sollen.

**Definition** *Eine Filterabbildung* $\psi$ heißt *U-Abbildung, wenn sie die beiden folgenden Eigenschaften besitzt:*

(1) *Für jede filtrierende Menge* M* *gilt* $\psi\left(\bigwedge_{\mathfrak{a} \in M^*} \mathfrak{a}\right) = \bigwedge_{\mathfrak{a} \in M^*} \psi\mathfrak{a}$.

(2) *Zu jedem Filter* $\mathfrak{a}$ *und zu jedem Ultrafilter* $\mathfrak{u}^*$ *mit* $\mathfrak{u}^* \leq \psi\mathfrak{a}$ *gibt es einen Ultrafilter* $\mathfrak{u}$ *mit* $\mathfrak{u} \leq \mathfrak{a}$ *und* $\psi\mathfrak{u} = \mathfrak{u}^*$.

Die von Punktabbildungen $\varphi: X \to X$ induzierten Filterabbildungen $\hat{\varphi}$ sind U-Abbildungen. Die Klasse der U-Abbildungen ist jedoch wesentlich umfangreicher. Andererseits kann man ein Konstruktionsverfahren für U-Abbildungen angeben, das einem einen gewissen Überblick über diese Klasse verschafft.

**Satz** *Es sei* $\psi$ *eine U-Abbildung. Dann gilt:*

(1) *Aus* $\mathfrak{a} \leq \mathfrak{b}$ *folgt* $\psi\mathfrak{a} \leq \psi\mathfrak{b}$.

(2) *Ist* $\mathfrak{u}$ *ein Ultrafilter, so ist auch* $\psi\mathfrak{u}$ *ein Ultrafilter, oder es gilt* $\psi\mathfrak{u} = \mathfrak{o}$.

(3) *Ist* M* *saturiert, so folgt* $\psi\left(\bigvee_{\mathfrak{a} \in M^*} \mathfrak{a}\right) = \bigvee_{\mathfrak{a} \in M^*} \psi\mathfrak{a}$.

(4) *Für alle Filter* $\mathfrak{a}$ *ist* $\psi\mathfrak{a} = \bigwedge_{A \in \mathfrak{a}} \bigvee_{\substack{\mathfrak{u} \leq A \\ \mathfrak{u} \in \mathbb{U}_f}} \psi\mathfrak{u}$.

*Sind* $\psi$ *und* $\chi$ *U-Abbildungen, so ist auch* $\chi \circ \psi$ *eine U-Abbildung.*

Mit Hilfe von U-Abbildungen kann nun wieder eine Präordnung für Ultrafilter erklärt werden.

**Satz** *Es sei* $\Psi$ *eine Menge von U-Abbildungen, die alle von Punktabbildungen induzierte Filterabbildungen und mit* $\psi, \chi$ *stets auch* $\chi \circ \psi$ *enthält. Definiert man* $\mathfrak{u}_1 \ll \mathfrak{u}_2$ *für* $\mathfrak{u}_1, \mathfrak{u}_2 \in \mathbb{U}$ *durch die Existenz eines* $\psi \in \Psi$ *mit* $\psi\mathfrak{u}_2 = \mathfrak{u}_1$, *so ist* $\ll$ *eine Präordnung und eine Vergröberung von* $\trianglelefteq$.

Mit derartigen Präordnungen kann nun das im vorangehenden Abschnitt behandelte Konstruktionsverfahren auch im Fall überabzählbarer Ultrafilterfolgen durchgeführt werden, wobei nur an die Stelle der fehlenden Punktabbildungen $\psi_\iota$ jetzt U-Abbildungen treten. Allerdings sind hinsichtlich $\ll$ die erhaltenen Niveauschichten wesentlich größer. Man muß sich daher bemühen, durch eine geeignete Wahl von $\Psi$ eine Beschränkung zu erreichen, so daß die Niveauschichten danach wieder hinsichtlich der Präordnung $\trianglelefteq$ untergliedert werden können. Hierfür bietet sich im Fall einer wieder abzählbaren Grundmenge die Menge $\Psi$ aller derjenigen U-Abbildungen $\psi$ an, die die Menge der abzählbar-primitiven Ultrafilter in sich abbilden und die außerdem für abzählbar-primitive Ultrafilter $\mathfrak{u}$ noch $\psi\mathfrak{u} \trianglelefteq \mathfrak{u}$ erfüllen.

Prof. em. Dr. Hans-Joachim Kowalsky
38302 Wolfenbüttel · Am Schiefen Berg 20